1. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΆΛΓΕΒΡΑ BOOLE, ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1.1. Συστήματα Αρίθμησης

Ένα σύστημα αριθμών χρησιμοποιεί ένα σύνολο συμβόλων γνωστό ως ψηφία. Υπάρχουν διάφορα συστήματα αριθμών όπως το δεκαδικό, το δυαδικό, το οκταδικό, κλπ.

Στο δεκαδικό σύστημα χρησιμοποιούνται δέκα ψηφία **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & 9 ,** ενώ το **10** ορίζεται ως βάση του συστήματος.

Παράδειγμα 1.1.

$$809{,}12 = 8 \cdot 10^{2} + 0 \cdot 10^{1} + 9 \cdot 10^{0} + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

Η γενική μορφή της απεικόνισης στο δεκαδικό σύστημα είναι:

$$D_{10} = d_n \cdot 10^{n} + d_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + d_1 \cdot 10^{1} + d_0 \cdot 10^{0} + d_{-1} \cdot 10^{-1} + d_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots + d_{-n} \cdot 10^{-n}$$

Επίσης, ο αριθμός μπορεί να παρασταθεί και ως εξής:

$$d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \ldots d_{-n}$$

όπου d_i είναι οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του 10.

Γενικά οι αριθμοί μπορεί να έχουν βάσεις διάφορες του 10, για παράδειγμα:

βάση 16, δεκαεξαδικό σύστημα,

βάση 8, οκταδικό σύστημα, ή

βάση 2, δυαδικό σύστημα.

Στο δυαδικό σύστημα που έχει βάση το 2 υπάρχουν δύο ψηφία, το 0 και το 1.

Παράδειγμα 1.2

1010

$$1x2^{3} + 0x2^{2} + 1x2^{1} + 0x2^{0}$$

Ο αντίστοιχος δεκαδικός του 1010 είναι ο 8+0+2+0=10.

Η μορφή της γενικής παράστασης στο δυαδικό σύστημα είναι:

$$B_2 = b_n \cdot 2^{n} + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot 2^{1} + b_0 \cdot 2^{0} + b_{-1} \cdot 2^{-1} + b_{-2} \cdot 2^{-2} + \ldots + b_{-n} \cdot 2^{-n}$$

Επίσης, ο αριθμός μπορεί να παρασταθεί και ως εξής:

$b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-n}$

όπου b_i είναι οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του 2.

Για παράδειγμα οι ακέραιοι δυαδικοί αριθμοί με 4 ψηφία είναι της μορφής:

$b_3 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$

Ο μεγαλύτερος αριθμός με **4** ψηφία είναι ο **1111** ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον δεκαδικό αριθμό 15.

1 1 1 1

$\mathbf{2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0}$

8+ 4+ 2+ 1= 15

Γενικά ένας δυαδικός αριθμός με n ψηφία μπορεί να παραστήσει ένα εύρος από 2^n δεκαδικούς αριθμούς:

1 ψηφίο 0 και 1

2 ψηφία 0 - 3

3 ψηφία 0 - 7

4 ψηφία 0 - 15

5 ψηφία 0 – 31κ.λπ.

1.2. Άλγεβρα Boole

Η Άλγεβρα Boole είναι μία αλγεβρική δομή πάνω σε ένα σύνολο στοιχείων μαζί με τους δυαδικούς τελεστές + και –.

1.3. Αξιώματα Huntigton

Τα αξιώματα που ικανοποιούνται είναι τα παρακάτω:

- **Αξίωμα Α1: Ισοδυναμία.**

Υπάρχει ένα σύνολο Κ με αντικείμενα ή στοιχεία, που υπακούουν σε μια σχέση ισοδυναμίας, α = β (όπου το σύμβολο ‘=’ διαβάζεται είναι ίσο με), που ικανοποιεί την αρχή της αντικατάστασης. Αν το στοιχείο α ανήκει στο σύνολο

Κ, γράφουμε [α ∈ Κ], (όπου το σύμβολο ∈ διαβάζεται ανήκει στο). Γράφοντας α = β, εννοούμε ότι το α μπορεί να αντικατασταθεί από το β, σε οποιαδήποτε λογική έκφραση που περιέχει το α, χωρίς να επηρεαστεί η τιμή της έκφρασης αυτής. Ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας είναι η ανακλαστική ιδιότητα (α = α), η συμμετρική ιδιότητα (α = β <=> β = α), (όπου το σύμβολο <=> διαβάζεται ταυτίζεται με το), και η μεταβατική ιδιότητα (α = β και β = γ => α = γ) , (όπου το σύμβολο => διαβάζεται συνεπάγεται).

- **Αξίωμα Α2.1: Πράξη πρόσθεσης.**

Ένας κλειστός νόμος (σύμβολο '+' διαβάζεται συν), που θα τον λέμε πρόσθεση, ορίζεται έτσι, ώστε αν α ∈ Κ και β ∈ Κ, τότε (α + β) ∈ Κ.

- **Αξίωμα Α2.2: Πράξη πολλαπλασιασμού.**

Ένας κλειστός νόμος (σύμβολο '•' διαβάζεται επί), που θα τον λέμε πολλαπλασιασμό ορίζεται έτσι, ώστε αν α ∈ Κ και β ∈ Κ, τότε (α • β) ∈ Κ.

- **Αξίωμα Α3.1: Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης.**

Υπάρχει μόνο ένα στοιχείο 0 ∈ Κ τέτοιο, ώστε (για κάθε α ∈ Κ) (α + 0) = α. Το 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

- **Αξίωμα Α3.2: Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού.**

Υπάρχει μόνο ένα στοιχείο 1 ∈ Κ τέτοιο, ώστε (για κάθε α ∈ Κ) (α • 1) = α. Το 1 λέγεται ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

- **Αξίωμα Α4.1: Αντιμετάθεση προσθετέων.**

Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, δηλαδή (α + β) = (β + α).

- **Αξίωμα Α4.2: Αντιμετάθεση παραγόντων.**

Ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός, δηλαδή (α • β) = (β • α).

- **Αξίωμα Α5.1: Επιμεριστική πρόσθεση.**

Η πρόσθεση είναι επιμεριστική επί του πολλαπλασιασμού, δηλαδή α + (β • γ) = (α + β) • (α + γ). Αυτό είναι ένα αξίωμα της άλγεβρας Boole που δεν ισχύει στην άλγεβρα των πραγματικών αριθμών!

- **Αξίωμα Α5.2: Επιμεριστικός πολλαπλασιασμός.**

Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός επί της πρόσθεσης, δηλαδή α • (β + γ) = (α • β) + (α • γ). Σημείωση : Όταν δεν υπάρχει περίπτωση παρανόησης, παραλείπουμε την αναγραφή του επί '•' και χρησιμοποιούμε απλή παράθεση των παραγόντων. Για παράδειγμα, η σχέση εδώ μπορεί να γραφτεί έτσι : α (β + γ) = α β + α γ .

- **Αξίωμα Α6: Συμπληρώματα.**

Για κάθε στοιχείο α ∈ Κ υπάρχει μόνο ένα στοιχείο α', για το οποίο ισχύει ότι α + α' = 0 (Α6.1) και α • α' = 1 (Α6.2)

- **Αξίωμα Α7: Διακριτά στοιχεία.**

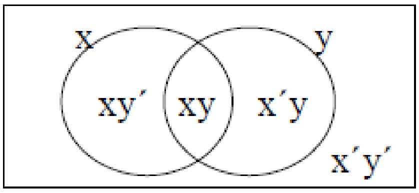
Υπάρχουν τουλάχιστον δυο στοιχεία α και β μέσα στο Κ που δεν είναι ισοδύναμα. Ανάλογα με το πλήθος και το είδος των στοιχείων του Κ, καθορίζεται και μια άλγεβρα. Η απλούστερη άλγεβρα Boole έχει μόνο δυο στοιχεία, δηλαδή το Κ = {0, 1}. Για τα στοιχεία αυτά ισχύουν τα εξής : 1' = 0 και 0' = 1, 0 + 0 = 0 και 1 • 1 = 1, 0 + 1 = 1 και 1 • 0 = 0, 1 + 0 = 1 και 0 • 1 = 0, 1 + 1 = 1 και 0 • 0 = 0 (Α7).

Τα αξιώματα και τα θεωρήματα της Άλγεβρας Boole, συνοψίζονται ως εξής:

Αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole

Αξίωμα 2	(a) $x + 0 = x$	(b) $x \cdot 1 = x$
Αξίωμα 5	(a) $x + x' = 1$	(b) $x \cdot x' = 0$
Θεώρημα 1	(a) $x + x = x$	(b) $x \cdot x = x$
Θεώρημα 2	(a) $x + 1 = 1$	(b) $x \cdot 0 = 0$
Θεώρημα 3, (δύο αρνήσεις)	$(x')' = x$	
Αξίωμα 3, αντιμεταθετική	(a) $x + y = y + x$	(b) $xy = yx$
Θεώρημα 4, προσεταιριστική	(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$	(b) $x(yz) = (xy)z$
Αξίωμα 4, επιμεριστική	(a) $x(y + z) = xy + xz$	(b) $x + yz = (x + y)(x + z)$
Θεώρημα 5, De Morgan	(a) $(x + y)' = x'y'$	(b) $(xy)' = x' + y'$
Θεώρημα 6, απορρόφηση	(a) $x + xy = x$	(b) $x(x + y) = x$

Προτεραιότητα Τελεστών
1. Παρενθέσεις
2. Όχι
3. Και
4. Ή



Εικόνα 1-1 .Αξιώματα και θεωρήματα της Άλγεβρας Boole.

Πηγή: M. Morris Mano, Ψηφιακή Σχεδίαση, 2η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1992.

1.3.1. Διαφορές με συνήθη Άλγεβρα

Οι διαφορές της Άλγεβρας Boole σε σχέση με τη συνήθη Άλγεβρα, είναι οι εξής:

1. Τα αξιώματα Huntigton δεν περιλαμβάνουν τον προσεταιριστικό νόμο που όμως αποδεικνύεται ότι ισχύει.

2. Ο επιμεριστικός νόμος του + ως προς τον · ισχύει για την άλγεβρα Boole αλλά όχι για την συνήθη άλγεβρα.

3. Η άλγεβρα Boole δεν έχει προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά αντίστροφα άρα δεν υπάρχει αφαίρεση - διαίρεση.

4. Το συμπλήρωμα δεν υπάρχει στην συνήθη άλγεβρα.

5. Η συνήθης άλγεβρα ασχολείται με το απειροσύνολο των πραγματικών. Η Boole έχει δύο στοιχεία, τα 0, 1.

1.3.2. Η δίτιμη Άλγεβρα Boole

Δυϊσμός: Ό,τι ισχύει από τα αξιώματα Huntigton για το + (·) μπορεί να προκύψει από το (+) με εναλλαγή τελεστών και ουδέτερων στοιχείων.[1]

Οι βασικές πράξεις της Άλγεβρας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1-1.Η δίτιμη άλγεβρα Boole.

Πηγή: Διδάσκων.

x	**y**	**x’**	**x.y**	**x+y**
0	0	**1**	**1**	**0**
0	1	**1**	**0**	**1**
1	0	**0**	**1**	**1**
1	1	**0**	**0**	**1**

1.3.3. Συναρτήσεις Boole

Μια συνάρτηση είναι μια έκφραση από δυαδικές μεταβλητές, τους δύο δυαδικούς τελεστές, παρενθέσεις και ένα ίσον.

Παράδειγμα 1.3

[1] Βλέπε [4].

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Εικόνα 1-2. Πίνακας αληθείας μιας συνάρτησης Boole με 3 εισόδους x, y, z και 4 εξόδους F1, F2, F3 και F4.

Πηγή: Διδάσκων.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω εικόνα:

$F_1(x,y,z) = x \cdot y \cdot z'$, αφού η F_1 γίνεται 1 μόνο όταν x=1, y=1 και z=0. Ομοίως:

$F_2(x,y,z) = x + y' \cdot z$

$F_3(x,y,z) = x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z + x \cdot y'$

$F_4(x,y,z) = x \cdot y' + x' \cdot z$

Παρατηρούμε ότι η F_3 και η F_4 είναι ίσες.

Εφόσον οι F_3, F_4 είναι ίσες και το κύκλωμα για την F_4 είναι μικρότερο, συμφέρει να βρίσκουμε τις απλούστερες εκφράσεις με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών (ελαχιστοποίηση παραγόντων – όρων), χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα και τα αξιώματα της άλγεβρας Boole.

1.3.4. Άλλες λογικές πράξεις

Υπάρχουν $(2^2)^n$ διαφορετικές συναρτήσεις n δυαδικών μεταβλητών. Για n=2 έχουμε 16 διαφορετικές συναρτήσεις Boole. Οι AND και OR είναι απλά 2 από τις 16. Στην Εικόνα 2, φαίνονται και οι 16 πράξεις.

1.4. Λογικές Πύλες

Οι λογικές πύλες που θα μελετηθούν είναι οι εξής (Εικόνες 3 και 4)[2]:

AND

OR

[2] Βλέπε [4].

NOT

απομονωτής

NAND

NOR

XOR

Οι πύλες εκτός του αντιστροφέα και του απομονωτή, μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες από δύο εισόδους. Βασική προϋπόθεση να είναι αντιμεταθετικές – επιμεριστικές.

Συναρτήσεις Boole	Σύμβολο τελεστή	Όνομα	Σχόλια
$F_0 = 0$		Ουδέτερη	Δυαδική σταθερά 0
$F_1 = xy$	$x \cdot y$	ΚΑΙ (AND)	x ΚΑΙ y
$F_2 = xy'$	x/y	Αποτροπή	x αλλά όχι y
$F_3 = x$		Μεταφορά	x
$F_4 = x'y$	y/x	Αποτροπή	y αλλά όχι x
$F_5 = y$		Μεταφορά	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Αποκλειστικό- Ή	x Ή y αλλά όχι και τα δύο
$F_7 = x + y$	$x + y$	Ή (OR)	x Ή y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	ΟΥΤΕ (NOR)	ΟΧΙ- Ή
$F_9 = xy + x'y'$	$x \odot y$	Ισοδυναμία*	x ίσον y
$F_{10} = y'$	y'	Συμπλήρωμα	ΟΧΙ y
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	Συνεπαγωγή	Αν y τότε x
$F_{12} = x'$	x'	Συμπλήρωμα	ΟΧΙ x
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	Συνεπαγωγή	Αν x τότε y
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	NAND (ΟΧΙ-ΚΑΙ)	ΟΧΙ-ΚΑΙ
$F_{15} = 1$		Ταυτότητα	Δυαδική σταθερά 1

* Η ισοδυναμία ("equivalence") λέγεται επίσης και "ισότητα" ("equality"), "σύμπτωση" ("coincidence") ή "αποκλειστικό-ΟΥΤΕ" ("exclusive NOR").

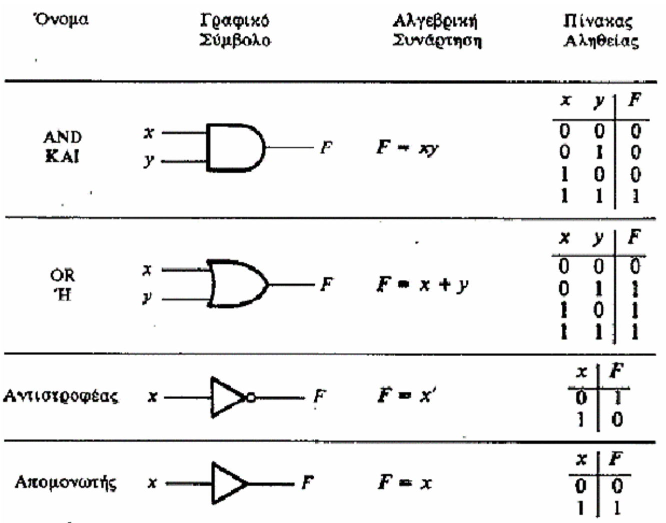
Εικόνα 1-3. Άλλες λογικές πράξεις.

Πηγή: Γ. Αλεξίου, Σημειώσεις για το μάθημα Λογικός Σχεδιασμός Ι,

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, 2010,

διαθέσιμο από:

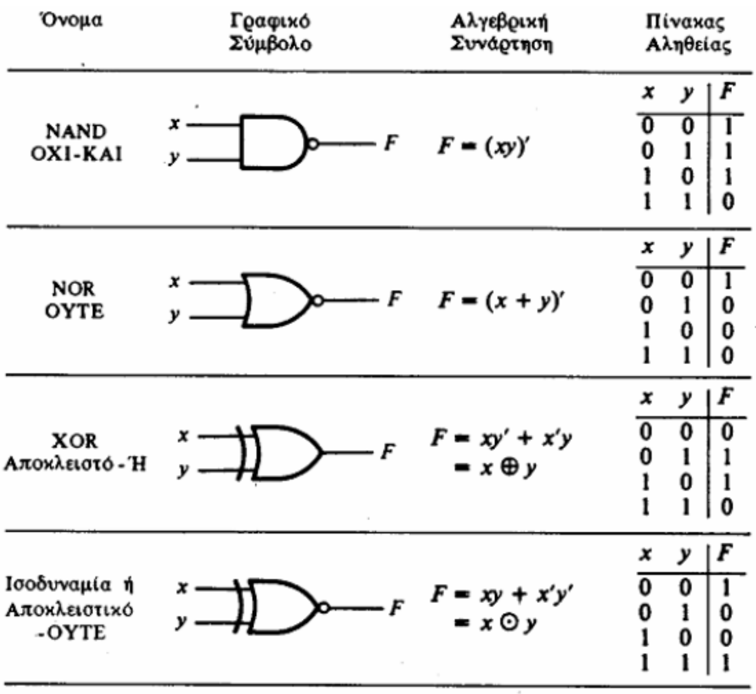
http://www.ceid.upatras.gr/faculty/alexiou/dig_design/notes/2_Boolean_Algebra.pdf



Εικόνα 1-4. Οι πύλες AND, OR, NOT και απομονωτή.

Πηγή: Γ. Αλεξίου, Σημειώσεις για το μάθημα Λογικός Σχεδιασμός Ι, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, 2010, διαθέσιμο από:

http://www.ceid.upatras.gr/faculty/alexiou/dig_design/notes/2_Boolean_Algebra.pdf



Εικόνα 1-5. Οι πύλες NAND, NOR, XOR και ισοδυναμίας.

Πηγή: Γ. Αλεξίου, Σημειώσεις για το μάθημα Λογικός Σχεδιασμός Ι, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, 2010, διαθέσιμο από:

http://www.ceid.upatras.gr/faculty/alexiou/dig_design/notes/2_Boolean_Algebra.pdf

1.5. Ολοκληρωμένα κυκλώματα

Τα ολοκληρωμένα που θα χρησιμοποιηθούν σ’ αυτό το κεφάλαιο, είναι τα εξής[3]:

7404 – αντιστροφέας NOT.

7408 – AND δύο εισόδων.

7432 – OR δύο εισόδων.

1.6. Εργαστηριακή Άσκηση 1

1.6.1. Εκφώνηση

Σχεδιάστε ένα ψηφιακό κύκλωμα με τρεις εισόδους A, B, C και μία έξοδο F. Η έξοδος F θα ενεργοποιείται (θα είναι στην λογική κατάσταση 1), όταν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες στις εισόδους.

α) A=0, C=0.

β) A=1, B=1.

γ) A=1, C=0.

Βρείτε την συνάρτηση που περιγράφει την λειτουργία του κυκλώματος, συμπληρώστε τον πίνακα αλήθειας και στη συνέχεια υλοποιείστε το κύκλωμα χρησιμοποιώντας τα ολοκληρωμένα 7404, 7408 και 7432.

1.6.2. Παραδοτέα

i. Ο πίνακας αλήθειας.
ii. Η συνάρτηση του κυκλώματος.
iii. Η απλοποιημένη συνάρτηση του κυκλώματος.
iv. Η σχεδίαση του κυκλώματος στο Multisim ή στο Multimedia Logic, πριν και μετά την απλοποίηση.
v. Ποιο κύκλωμα, από τις δύο μορφές, πιστεύετε ότι θα υλοποιηθεί στο εργαστήριο και γιατί;

1.6.3. Στόχοι

Να αποκτήσουν οι σπουδαστές εξοικείωση με τις συναρτήσεις της Άλγεβρας Boole και την εφαρμογή των αξιωμάτων και των θεωρημάτων, στην απλοποίηση αυτών.

1.6.4. Ενδεικτική λύση

Ο πίνακας αλήθειας είναι ο εξής:

Πίνακας 1-2. Πίνακας αλήθειας 1ης Εργαστηριακής Άσκησης.

A	**B**	**C**	**F**
0	0	0	**1**

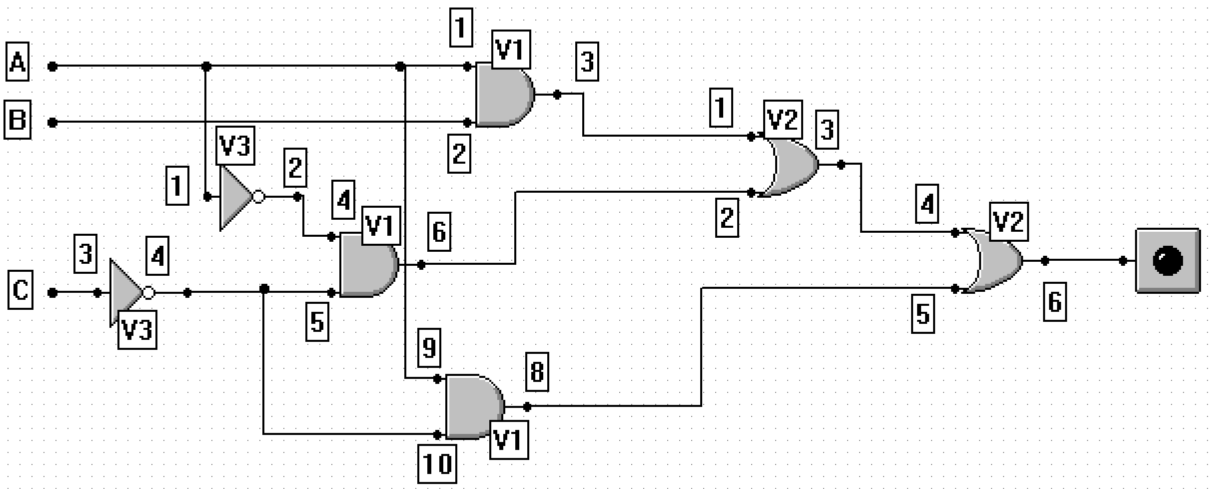
[3] Όλα τα ολοκληρωμένα αναλύονται στο Παράρτημα Γ.

A	B	C	F
0	0	1	**0**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Η συνάρτηση που περιγράφει τη λειτουργία του κυκλώματος είναι:

$$F(A,B,C) = A' \cdot C' + A \cdot B + A \cdot C'$$

Το αντίστοιχο κύκλωμα (με τη βοήθεια του Multimedia Logic) είναι το εξής:



Εικόνα 1-6. Το κύκλωμα της 1ης Εργαστηριακής Άσκησης (πριν την απλοποίηση).

Πηγή: Διδάσκων.

Τα ολοκληρωμένα που χρησιμοποιήθηκαν πριν την απλοποίηση είναι τα:

- 1 ολοκληρωμένο 7408 – AND δύο εισόδων (V1).
- 1 ολοκληρωμένο 7432 – OR δύο εισόδων (V2).
- 1 ολοκληρωμένο 7404 – αντιστροφέας NOT (V3).

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί – χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole – ως εξής:

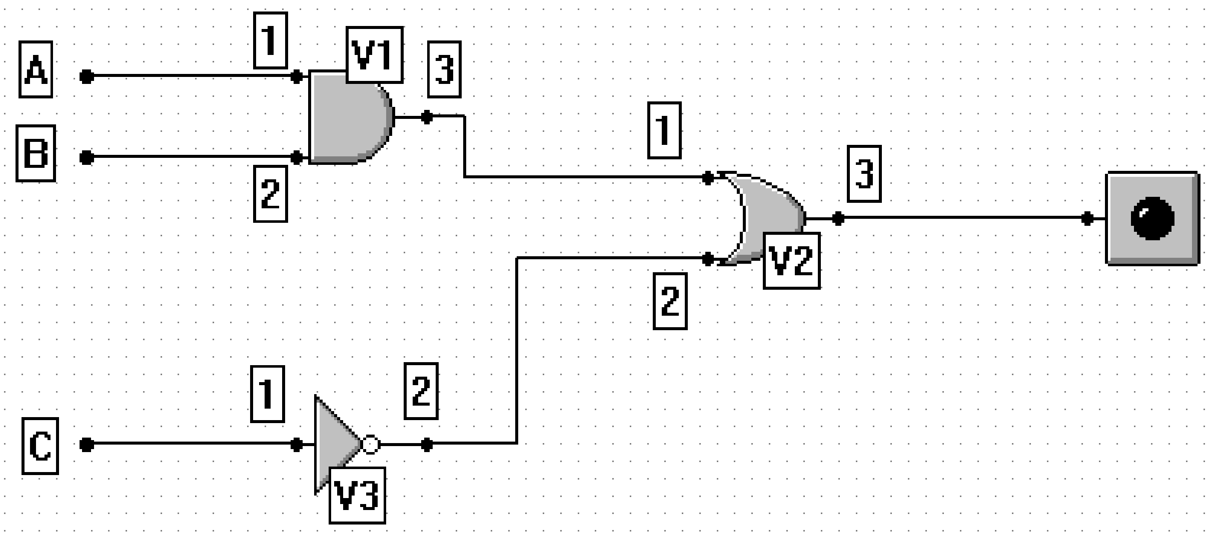
$$F(A,B,C) = A' \cdot C' + A \cdot B + A \cdot C' \quad \Leftrightarrow$$

$$F(A,B,C) = C' \cdot (A' + A) + A \cdot B \quad \Leftrightarrow$$ (αξίωμα 4α)

$$F(A,B,C) = C' \cdot 1 + A \cdot B \quad \Leftrightarrow$$ (αξίωμα 5α)

$$F(A,B,C) = C' + A \cdot B$$ (αξίωμα 2β)

Το αντίστοιχο απλοποιημένο κύκλωμα (με τη βοήθεια του Multimedia Logic) είναι το εξής:



Εικόνα 1-7. Το κύκλωμα της 1ης Εργαστηριακής Άσκησης (μετά την απλοποίηση).

Πηγή: Διδάσκων.

Τα ολοκληρωμένα που χρησιμοποιήθηκαν μετά την απλοποίηση είναι τα:

- 1 ολοκληρωμένο 7408 – AND δύο εισόδων (V1).
- 1 ολοκληρωμένο 7432 – OR δύο εισόδων (V2).
- 1 ολοκληρωμένο 7404 – αντιστροφέας NOT (V3).

Παρατηρούμε, ότι είτε κάνοντας απλοποίηση είτε όχι, τον ίδιο αριθμό ολοκληρωμένων θα χρησιμοποιήσουμε. Όμως, είναι προφανές, ότι με την απλοποιημένη μορφή, κερδίζουμε σημαντικά στο πλήθος των συνδέσεων. Επομένως, για την υλοποίηση στο εργαστήριο θα χρησιμοποιηθεί η 2η μορφή.

1.7. Χάρτες Karnaugh

Οι **χάρτες Karnaugh** είναι ένας τρόπος αναπαράστασης των λογικών συναρτήσεων. Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με **χάρτη Karnaugh (ΧΚ),** σε αντίθεση με την άλγεβρα Boole δίνει γρήγορα την απλούστερη μορφή των λογικών συναρτήσεων, ειδικά όταν η συνάρτηση έχει μέχρι 6 μεταβλητές. Ο ΧΚ είναι ισοδύναμος σε πληροφορία με τον πίνακα αληθείας της λογικής συνάρτησης. Ωστόσο, είναι ευκολότερο να κάνουμε απλοποιήσεις πάνω στην κανονική μορφή της λογικής συνάρτησης μέσω του ΧΚ, παρά μέσω του πίνακα αληθείας της.

Ο ΧΚ αποτελείται από τετράγωνα, ένα για κάθε όρο της συνάρτησης, επομένων το πλήθος τους δίνεται από τη σχέση: πλήθος = 2^n, όπου n το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης. Ο χάρτης Karrnaugh είναι ένας πίνακας όπου το κάθε τετράγωνο αναπαριστά ένα συνδυασμό των μεταβλητών, δηλαδή κάθε τετράγωνο ενός χάρτη Karnaugh αντιστοιχεί σε έναν όρο της λογικής συνάρτησης που αναπαριστά.

Η αναπαράσταση μίας λογικής συνάρτησης με χάρτη Karnaugh γίνεται θέτοντας “1” σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε όρο που η συνάρτηση έχει τιμή 1 και θέτοντας “0” (ή τίποτα) σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε όρο που η συνάρτηση έχει τιμή 0.

Σε πολλές περιπτώσεις, μερικοί συνδυασμοί των μεταβλητών εισόδου δεν έχουν νόημα και δεν πρόκειται να συμβούν. Αυτοί οι συνδυασμοί καλούνται συνθήκες αδιαφορίας γιατί δεν ενδιαφέρει η τιμή της συνάρτησης για τους συνδυασμούς αυτούς. Στον πίνακα αληθείας και στο χάρτη Karnaugh μίας τέτοιας συνάρτησης οι τιμές της συνάρτησης στις **συνθήκες αδιαφορίας** συμβολίζονται με Χ.

Όλη η διαδικασία για την απλοποίηση μιας λογικής συνάρτησης εκτελείται σε πέντε βήματα.[4]

Φέρνουμε τη λογική συνάρτηση σε κανονική μορφή. Δηλαδή σε μορφή αθροίσματος γινομένων (ελαχιστόρων) ή σε μορφή γινομένου αθροισμάτων (μεγιστόρων). Αν δηλαδή η αρχική λογική συνάρτηση δεν είναι σε τέτοια μορφή, θα πρέπει να τη μετατρέψουμε, προσθέτοντας σε κάθε όρο (για τη μορφή ελαχιστόρων) ή πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο(για τη μορφή μεγιστόρων) τη μεταβλητή που λείπει. Π.χ. αν λείπει η μεταβλητή Χ από την έκφραση της λογικής συνάρτησης και η λογική συνάρτηση είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων, τότε πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε όρο της συνάρτησης αυτής το Χ·Χ’. Αν η μορφή της λογικής συνάρτησης είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων, τότε θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της με το (Χ+Χ’).

Υπολογίζουμε το πλήθος των τετραγώνων του ΧΚ από τη σχέση πλήθος = 2n, όπου n το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης. Για n = 2, 3, 4, 5 και 6, θα χρειαστούμε αντίστοιχα 4, 8, 16, 32 και 64 τετράγωνα αντίστοιχα. Καθένα από τα τετράγωνα έχει «συντεταγμένες», όπως φαίνονται στη συνέχεια.

Κάθε συνδυασμός των μεταβλητών αντιστοιχεί σε ένα τετράγωνο του ΧΚ. Τοποθετούμε την προς απλοποίηση συνάρτηση στον ΧΚ ως εξής: Βάζουμε έναν (1) στο αντίστοιχο τετράγωνο αν η λογική συνάρτηση είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων ή ένα (0) αν είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων. Τυχόν αδιάφορους όρους τους σημειώνουμε με Χ ή d.

Μετά τη συμπλήρωση του ΧΚ και ανάλογα με τη λογική που θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή του λογικού κυκλώματος, σχηματίζουμε ομάδες γειτονικών διαδοχικών τετραγώνων, σχήματος ορθογωνίου, τετραγώνου ή «κύβου», με μονάδες ή μηδενικά, ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες:

Να ληφθούν υπόψη όλες οι μονάδες ή όλα τα μηδενικά.

Το πλήθος των μονάδων ή μηδενικών των ομάδων αν υπακούει στη σχέση m=2k, όπου k=0,1,2,3,4,5,... .

[4] Βλέπε [5].

Οι ομάδες να είναι όσο το δυνατό λιγότερες και ταυτόχρονα όσο το δυνατό μεγαλύτερου πλήθους τετραγώνων.

Οι αδιάφοροι όροι χρησιμοποιούνται είτε ως μονάδες είτε ως μηδενικά ανάλογα με την έκφραση της αρχικής λογικής συνάρτησης.

Κάθε μονάδα ή μηδενικό ή αδιάφορος όρος χρησιμοποιείται όσες φορές χρειάζεται στις ομάδες ώστε να πετύχουμε τη μεγαλύτερη και καλύτερη απλοποίηση.

Από τις ομάδες που σχηματίσαμε εξάγουμε την απλοποιημένη λογική συνάρτηση που είναι και η τελική έκφραση της αρχικής λογικής συνάρτησης.

Το τελευταίο βήμα είναι να σχεδιάσουμε το κύκλωμα της απλοποιημένης λογικής συνάρτησης. Αν είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων το κύκλωμα σχεδιάζεται με λογική σχεδίασης AND-OR ή NAND. Αν είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων, το κύκλωμα σχεδιάζεται με λογική σχεδίασης OR-AND ή NOR.

Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου δύο τετράγωνα στο χάρτη, θεωρούνται γειτονικά αν και δεν «ακουμπούν» μεταξύ τους.

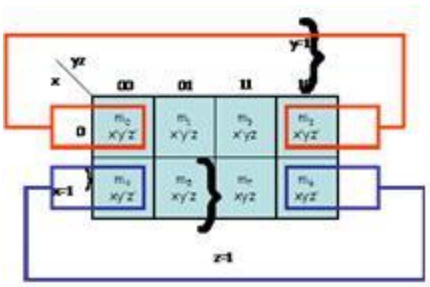
Π.χ. το m_0 είναι γειτονικό του m_2 και το m_4 είναι γειτονικό του m_6, γιατί οι ελαχιστόροι αυτοί διαφέρουν κατά μία μεταβλητή.

$m_0 + m_2 = x'y'z' + x'yz' = x'z'\ (y'+y) = x'z'$

$m_4 + m_6 = xy'z' + xyz' = xz'\ (y'+y) = xz'$

Ωστόσο, επειδή και οι τέσσερις αυτοί άσσοι μπορούν να ομαδοποιηθούν, καλύτερη ομαδοποίηση (και έτσι πρέπει να γίνεται) είναι η επόμενη:

$m_0 + m_2 + m_4 + m_6 = x'z' + xz' = z'(x'+x) = z'$.



Εικόνα 1-8. Παράδειγμα χρήσης χάρτη Karnaugh.

Πηγή: G. Patsis, TEI Αθήνας, Τμήμα Ηλεκτρονικής, 2010, διαθέσιμο από:

http://users.teiath.gr/patsisg/DIGITAL_LABS/index_files/Page913.htm

1.8. Εργαστηριακή Άσκηση 2

1.8.1. Εκφώνηση

Σχεδιάστε ένα ψηφιακό κύκλωμα που αντιστοιχεί στον παρακάτω πίνακα αληθείας. Αφού βρείτε τη λογική συνάρτηση, απλοποιήστε την όσο γίνεται και σχεδιάστε το κύκλωμα χρησιμοποιώντας πύλες AND, OR (δύο εισόδων) και NOT.

Πίνακας 1-3. Πίνακας αλήθειας 2ης Εργαστηριακής Άσκησης.

Πηγή: Διδάσκων.

A	B	C	D	F
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**0**
1	1	1	1	**0**

1.8.2. Παραδοτέα

i. Η συνάρτηση του κυκλώματος
ii. Η απλοποιημένη συνάρτηση του κυκλώματος
iii. Η σχεδίαση του κυκλώματος στο Multisim ή στο Multimedia Logic, μετά την απλοποίηση.

1.8.3. Στόχοι

Να αποκτήσουν οι σπουδαστές εξοικείωση με τις απλοποιήσεις των συναρτήσεων μέσω των χαρτών Karnaugh.

1.8.4. Ενδεικτική λύση

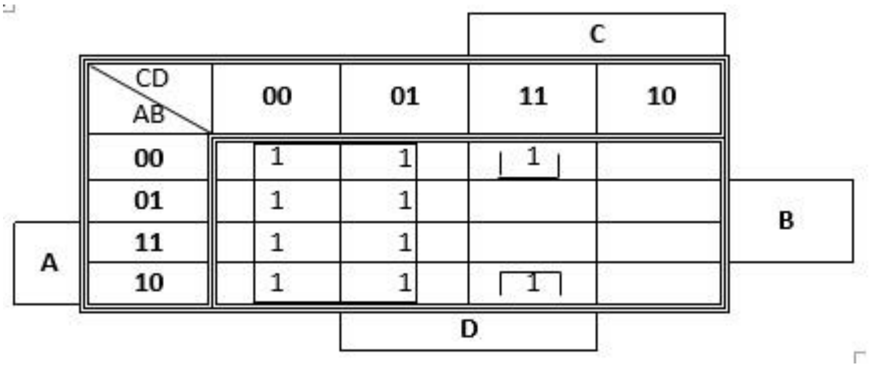
Η συνάρτηση που περιγράφει τη λειτουργία του κυκλώματος είναι:

$$F(A,B,C,D) = A'\cdot B'\cdot C'\cdot D' + A'\cdot B'\cdot C'\cdot D + A'\cdot B'\cdot C\cdot D + A'\cdot B\cdot C'\cdot D + A'\cdot B\cdot C'\cdot D +$$

$$+A\cdot B'\cdot C'\cdot D' + A\cdot B'\cdot C'\cdot D + A\cdot B'\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C'\cdot D' + A\cdot B\cdot C'\cdot D$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί είτε χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole (όπως στην Άσκηση 1) είτε με χρήση του πίνακα

Karnaugh. Στη συγκεκριμένη άσκηση, θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο. Η περιοχή του χάρτη που καλύπτεται απ' αυτή τη συνάρτηση αποτελείται από τα σημειωμένα τετράγωνα:



AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1	1		
11	1	1		
10	1	1	1	

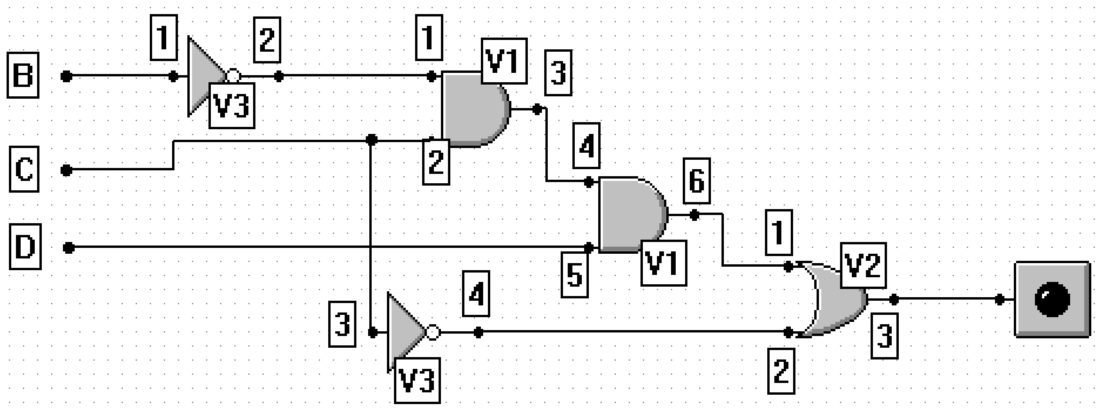
Εικόνα 1-9. Χάρτης Karnaugh 2ης Εργαστηριακής Άσκησης.

Πηγή: Διδάσκων.

Οι 8 άσσοι που εσωκλείστηκαν σε ένα τετράγωνο καθώς και οι 2 άσσοι στις θέσεις 0011 και 1011 απλοποιούνται ως εξής:

$$F(A,B,C,D) = C' + B' \cdot C \cdot D$$

Το αντίστοιχο απλοποιημένο κύκλωμα (με τη βοήθεια του Multimedia Logic) είναι το εξής:



Εικόνα 1-10 – Το κύκλωμα της 2ης Εργαστηριακής Άσκησης.

Πηγή: Διδάσκων.

Τα ολοκληρωμένα που χρησιμοποιήθηκαν μετά την απλοποίηση είναι τα:

- 1 ολοκληρωμένο 7408 – AND δύο εισόδων (V1).
- 1 ολοκληρωμένο 7432 – OR δύο εισόδων (V2).
- 1 ολοκληρωμένο 7404 – αντιστροφέας NOT (V3).