ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

3.1 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ
3.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ
3.1.2 ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ
3.1.3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΞΟΔΩΝ
3.1.4 ΛΟΓΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ

3.2 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
3.2.1 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE
3.2.2 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΧΑΡΤΕΣ KARNAUGH

3.3 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ
3.3.1 ΣΥΓΚΡΙΤΗΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

3.5 ΟΙΚΟΥΜΕΝΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ

3.6 ΠΕΡΙΛΗΨΗ
3.7 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
3.8 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ – ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Εργαστηριακή Άσκηση 3
Υλοποίηση Συνδυαστικού Κυκλώματος, όταν δίνεται η λογική συνάρτηση
Εργαστηριακή Άσκηση 4
Υλοποίηση Συνδυαστικού Κυκλώματος, όταν δίνεται ο Πίνακας Αληθείας
Εργαστηριακή Άσκηση 5
Υλοποίηση Συνδυαστικού Κυκλώματος, όταν δίνεται η περιγραφή ενός προβλήματος
Εργαστηριακή Άσκηση 6
Υλοποίηση Συνδυαστικού Κυκλώματος με οικουμενικές πύλες
Εργαστηριακή Άσκηση 7
Συγκριτές μεγέθους δυαδικών αριθμών

ΣΤΟΧΟΙ

Οι στόχοι του Κεφαλαίου 3 είναι:

- ♦ η απόκτηση βασικών θεωρητικών γνώσεων για τα παρακάτω αντικείμενα:
- ✓ Ανάλυση Συνδυαστικών Κυκλωμάτων
- ✓ Σχεδίαση Συνδυαστικών Κυκλωμάτων
- ✓ Απλοποίηση Λογικών Συναρτήσεων
- ✓ Σχεδίαση Συνδυαστικών Κυκλωμάτων με Οικουμενικές Πύλες
- ♦ η απόκτηση της δυνατότητας εφαρμογής των γνώσεων αυτών για:
- ✓ Υλοποίηση Συνδυαστικών Κυκλωμάτων
- ✓ Υλοποίηση Συνδυαστικών Κυκλωμάτων με Οικουμενικές Πύλες

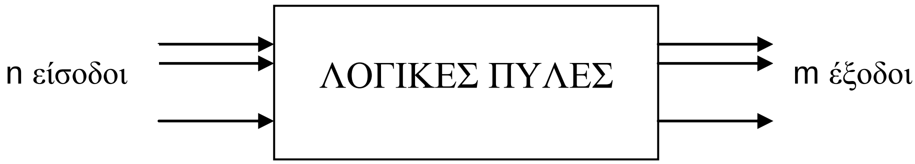
3.1 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

3.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα ψηφιακά κυκλώματα ανήκουν σε μία από τις δύο ακόλουθες βασικές κατηγορίες:
⇨ συνδυαστικά κυκλώματα (combinational circuits)
⇨ ακολουθιακά κυκλώματα (sequential circuits)

Ένα Συνδυαστικό Κύκλωμα (ΣΚ) αποτελείται από:
- εισόδους
- λογικές πύλες που συνδέονται μεταξύ τους
- εξόδους

όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.1.



Σχήμα 3.1.1
Συνδυαστικό Κύκλωμα

Όταν ένα συνδυαστικό κύκλωμα έχει n εισόδους και m εξόδους, τότε για κάθε έναν από τους 2^n δυνατούς συνδυασμούς εισόδων υπάρχει ένας και μόνον ένας δυνατός συνδυασμός εξόδων. Κάθε χρονική στιγμή, κάθε μία από τις εξόδους εξαρτάται από τις τιμές των εισόδων την ίδια χρονική στιγμή.

3.1.2 ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

Στον Πίνακα Αληθείας ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) καταγράφονται οι τιμές των εξόδων του ΣΚ για κάθε δυνατό συνδυασμό των τιμών των εισόδων του ΣΚ.

Ένα Συνδυαστικό Κύκλωμα που έχει n μεταβλητές εισόδου και m μεταβλητές εξόδου, έχει έναν Πίνακα Αληθείας. Ο πίνακας αυτός έχει στο αριστερό τμήμα n στήλες, όσες είναι και οι είσοδοι του κυκλώματος και στο δεξί τμήμα m στήλες, όσες είναι και οι έξοδοι του κυκλώματος. Το πλήθος των γραμμών του πίνακα είναι2^n, όσοι είναι και οι δυνατοί συνδυασμοί των εισόδων. Οι συνδυασμοί παράγονται σύμφωνα με την ακολουθία δυαδικής αρίθμησης του Πίνακα 2.3.1. Για κάθε έναν συνδυασμό εισόδων υπάρχει ένας και μόνον ένας δυνατός συνδυασμός εξόδων, που εξαρτάται από τη λειτουργία του κυκλώματος.

Για παράδειγμα, στον Πίνακα 3.1.1 παρουσιάζεται ο πίνακας αληθείας του συνδυαστικού κυκλώματος που εκτελεί την πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων (bits). Το κύκλωμα έχει δύο εισόδους x (πρώτος προσθετέος) και y (δεύτερος προσθετέος) και δύο εξόδους S (άθροισμα-sum) και C (κρατούμενο-carry).

Πίνακας 3.1.1
Πίνακας Αληθείας

Είσοδοι		Έξοδοι	
x	y	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

3.1.3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΞΟΔΩΝ

Σε ένα ΣΚ, κάθε χρονική στιγμή, κάθε μία από τις εξόδους εξαρτάται από τις εισόδους της ίδιας χρονικής στιγμής και μπορεί να εκφραστεί ως λογική συνάρτηση των μεταβλητών εισόδου. Όταν μία μεταβλητή έχει τιμή «1» στον πίνακα αληθείας, τότε εμφανίζεται ως έχει στη συνάρτηση, ενώ όταν έχει τιμή «0», τότε εμφανίζεται με το συμπλήρωμά της. Κάθε μεταβλητή λαμβάνει την κανονική της μορφή Οι συναρτήσεις των εξόδων του ΣΚ προκύπτουν από τον Πίνακα Αληθείας του ΣΚ.

Για παράδειγμα, από τον Πίνακα αληθείας 3.1.1 προκύπτει ότι:

- η συνάρτηση εξόδου S έχει τιμή S=1

όταν x=1 <u>και</u> (AND) y=0 $(x \cdot \overline{y})$

<u>ή</u> (OR)

όταν x=0 <u>και</u> (AND) y=1 $(\overline{x} \cdot y)$

διαφορετικά έχει τιμή S=0

επομένως

$S = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y = x \oplus y$

- η συνάρτηση εξόδου C έχει τιμή C=1

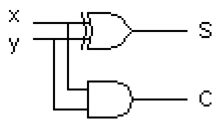
όταν x=1 <u>και</u> (AND) y=1 (x·y)
διαφορετικά έχει τιμή C=0
επομένως
C=x·y

3.1.4 ΛΟΓΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ

Οι συναρτήσεις εξόδων του ΣΚ μπορούν να υλοποιηθούν χρησιμοποιώντας λογικές πύλες, οπότε προκύπτει το λογικό κύκλωμα.

Για παράδειγμα, το ΣΚ με τις συναρτήσεις εξόδου που προέκυψαν στην παράγραφο 3.1.3 μπορεί να υλοποιηθεί με τις ακόλουθες πύλες:
- μία πύλη XOR
- μία πύλη AND

Το λογικό κύκλωμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1.2.



Σχήμα 3.1.2
Λογικό Κύκλωμα

3.2 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου ενός ΣΚ οδηγεί σε απλούστερο (και οικονομικότερο) κύκλωμα.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν δύο μέθοδοι απλοποίησης λογικών συναρτήσεων:
- με χρήση της Άλγεβρας Boole
- με χρήση των χαρτών Karnaugh

3.2.1 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χρήση της Άλγεβρας Boole, βασίζεται στη χρήση των Αξιωμάτων και των Θεωρημάτων της Άλγεβρας Boole (θα ήταν πολύ χρήσιμο να ξαναδιαβάζατε τον αντίστοιχο συγκεντρωτικό Πίνακα της Περίληψης του Κεφαλαίου 1).

Παραδείγματα.

1. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Y=\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$

$Y=\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}=$
$=\overline{A}\cdot B\cdot(C+\overline{C})=$
$=\overline{A}\cdot B$

2. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Y=(A+B)\cdot(A+\overline{B})$

$Y=(A+B)\cdot(A+\overline{B})=$
$=A\cdot A+A\cdot\overline{B}+B\cdot A+B\cdot\overline{B}=$
$=A+A\cdot\overline{B}+A\cdot B+0=$
$=(A+A\cdot B)+A\cdot\overline{B}=$
$=A+A\cdot\overline{B}=$
$=A$ (Θεώρημα Απορρόφησης)

3. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Y=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{C}}$

$Y=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{C}}=$
$=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}\cdot\overline{\overline{C}}=$ (Θεώρημα De Morgan)
$=(A+B)\cdot C$

3.2.2 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΧΑΡΤΕΣ KARNAUGH

Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χρήση των χαρτών Karnaugh είναι μία γραφική μέθοδος που βασίζεται σε μία διαφορετική αναπαράσταση των Πινάκων Αληθείας των λογικών συναρτήσεων και χρησιμοποιείται με ευκολία για απλοποίηση λογικών συναρτήσεων δύο, τριών και τεσσάρων μεταβλητών.

Ελάχιστοι όροι μίας συνάρτησης ονομάζονται τα γινόμενα όλων των όρων της συνάρτησης, όπου ο κάθε όρος (μεταβλητή) εμφανίζεται στην κανονική ή στη συμπληρωματική του μορφή.

Μία συνάρτηση n μεταβλητών έχει 2^n ελάχιστους όρους.
Στον Πίνακα 3.2.1 παρουσιάζονται οι οκτώ ελάχιστοι όροι μίας συνάρτησης τριών μεταβλητών (2^3=8).

Πίνακας 3.2.1
Ελάχιστοι Όροι

A	B	C	Ελάχιστοι όροι
0	0	0	m0= $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	m1= $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
0	1	0	m2= $\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0	1	1	m3= $\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	m4= $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1	0	1	m5= $A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	m6= $A\cdot B\cdot\overline{C}$
1	1	1	m7= $A\cdot B\cdot C$

Κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα ελάχιστων όρων.

Παράδειγμα 1.

Να εκφραστεί ως άθροισμα ελάχιστων όρων η συνάρτηση Y τριών μεταβλητών, ο πίνακας αληθείας της οποίας παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.2.2.

Πίνακας 3.2.2
Πίνακας Αληθείας της συνάρτησης Y

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Η συνάρτηση Y γράφεται ως άθροισμα ελάχιστων όρων:
$Y=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C$

Παράδειγμα 2.

Να εκφραστεί η συνάρτηση τριών μεταβλητών $Y=A\cdot B+\overline{A}\cdot C$
ως άθροισμα ελαχίστων όρων

Η συνάρτηση δίνεται σε μορφή αθροίσματος γινομένων.

Όμως σε κάθε γινόμενο δεν υπάρχουν όλοι οι όροι (μεταβλητές).

Για τις μεταβλητές που λείπουν από κάθε γινόμενο του αθροίσματος, πολλαπλασιάζουμε το γινόμενο αυτό με το άθροισμα της μεταβλητής, που λείπει και του συμπληρώματός της.

Αν για παράδειγμα, λείπει η μεταβλητή Α από ένα γινόμενο, τότε πολλαπλασιάζουμε το γινόμενο αυτό με το $(A+\overline{A})$.

Έτσι, όλα τα γινόμενα μετατρέπονται σε ελάχιστους όρους.

Επομένως, η συνάρτηση εκφράζεται ως άθροισμα ελαχίστων όρων.

Αυτή η διαδικασία εφαρμόζεται παρακάτω:

$$
\begin{aligned}
Y &= A\cdot B+\overline{A}\cdot C= \\
&= A\cdot B\cdot(C+\overline{C})+\overline{A}\cdot(B+\overline{B})\cdot C= \\
&= A\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C
\end{aligned}
$$

Αναπαράσταση λογικών συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh.

Οι χάρτες Karnaugh είναι ένας τρόπος αναπαράστασης των λογικών συναρτήσεων. Ο χάρτες Karnaugh αποτελείται από τετράγωνα, το κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί σε έναν ελάχιστο όρο της λογικής συνάρτησης που αναπαριστά.

Οι χάρτες Karnaugh δύο, τριών και τεσσάρων μεταβλητών παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.2.1, 3.2.2 και 3.2.3, αντίστοιχα.

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	m0	m1
A	m2	m3

Σχήμα 3.2.1
Χάρτης Karnaugh δύο μεταβλητών

	$\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{B}\cdot C$	$B\cdot C$	$B\cdot\overline{C}$
$\overline{A}$	m0	m1	m3	m2
A	m4	m5	m7	m6

Σχήμα 3.2.2

Χάρτης Karnaugh τριών μεταβλητών

	$\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{C}\cdot D$	$C\cdot D$	$C\cdot\overline{D}$
$\overline{A}\cdot\overline{B}$	m0	m1	m3	m2
$\overline{A}\cdot B$	m4	m5	m7	m6
$A\cdot B$	m12	m13	m15	m14
$A\cdot\overline{B}$	m8	m9	m11	m10

Σχήμα 3.2.3

Χάρτης Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών

Η αναπαράσταση μίας λογικής συνάρτησης με χάρτη Karnaugh γίνεται θέτοντας “1” σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε ελάχιστο όρο, όπου η συνάρτηση έχει τιμή “1” και “0” (ή τίποτα) σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε ελάχιστο όρο, όπου η συνάρτηση έχει τιμή “0”.

Παράδειγμα 1.

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση δύο μεταβλητών $Y(A,B)=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων, επομένως μπορεί να αναπαρασταθεί με το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.4.

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$		1
A	1	

Σχήμα 3.2.4
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
$Y(A,B)=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$

Παράδειγμα 2.

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών $Y(A,B,C)=\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C$

Η συνάρτηση είναι σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων, επομένως μπορεί να αναπαρασταθεί με τον χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.5.

	$\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{B}\cdot C$	$B\cdot C$	$B\cdot\overline{C}$
$\overline{A}$			1	1
A	1	1		

Σχήμα 3.2.5
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
$Y(A,B,C)=\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C$

Παράδειγμα 3.

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών $Y(A,B,C)=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot C$

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων:

$$Y(A,B,C)=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot C=$$
$$=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot(B+\overline{B})\cdot C=$$
$$=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C=$$

Επομένως η συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.6.

	$\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{B}\cdot C$	$B\cdot C$	$B\cdot\overline{C}$
$\overline{A}$			1	
A		1	1	

Σχήμα 3.2.6
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
$Y(A,B,C)=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot C$

Να παρατηρήσετε ότι:

- ο όρος $\overline{A}\cdot B\cdot C$ της συνάρτησης αντιστοιχεί στο μπλε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών A=0, B=1 και C=1
- ο όρος A·C συνάρτησης αντιστοιχεί στα δύο κόκκινα τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών A=1 και C=1

Παράδειγμα 4.

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών $Y(A,B,C,D)=A\cdot B\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{C}\cdot\overline{D}$
Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων (να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις):

$$\begin{aligned}Y(A,B,C,D)&=A\cdot B\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{C}\cdot\overline{D}=\\&=A\cdot B\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot(D+\overline{D})+(A+\overline{A})\cdot(B+\overline{B})\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}=\\&=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+\\&+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot C\cdot D\end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με τον χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.7.

	$\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{C}\cdot D$	$C\cdot D$	$C\cdot\overline{D}$
$\overline{A}\cdot\overline{B}$	1			
$\overline{A}\cdot B$	1		1	1
$A\cdot B$	1		1	
$A\cdot\overline{B}$	1			

Σχήμα 3.2.7
Χάρτης Karnaugh
της συνάρτησης $Y(A,B,C,D)=A\cdot B\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{C}\cdot\overline{D}$

Να παρατηρήσετε ότι:

- ο όρος $A\cdot B\cdot C\cdot D$ της συνάρτησης αντιστοιχεί στο μπλε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών A=1, B=1, C=1 και D=1
- ο όρος $\overline{A}\cdot B\cdot C$ της συνάρτησης αντιστοιχεί στα δύο κόκκινα τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών A=0, B=1 και C=1
- ο όρος $\overline{C}\cdot\overline{D}$ της συνάρτησης αντιστοιχεί στα τέσσερα πράσινα τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που είναι η τομή των περιοχών C=0 και D=0

Έτσι, με λίγη προσοχή θα μπορούσαμε να είχαμε αποφύγει τις πράξεις και να τοποθετούσαμε τους “1” της συνάρτησης κατευθείαν στο χάρτη Karnaugh.

Μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh.

Η βασική ιδέα για την απλοποίηση μίας λογικής συνάρτησης χρησιμοποιώντας χάρτες Karnaugh, είναι η ακόλουθη:

Γειτονικά τετράγωνα σε ένα χάρτη Karnaugh ονομάζονται τα τετράγωνα που είναι σε συνεχόμενες οριζόντιες ή κάθετες θέσεις, αλλά **όχι διαγώνιες** θέσεις.
Το πλήθος των γειτονικών τετραγώνων πρέπει να είναι δύναμη του 2, δηλαδή 2, 4, 8.
Έτσι, στο χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.3, τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m0 και m1 είναι γειτονικά. Επίσης, γειτονικά είναι τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m11 και m15, τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m4, m5, m6 και m7, καθώς και τα 8 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m2, m3, m6, m7, m10, m11, m14 και m15.
Δεν είναι γειτονικά τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m5 και m15.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των χαρτών Karnaugh είναι ότι είναι **αναδιπλούμενοι**. Η αναδίπλωση μπορεί να γίνει γύρω από την περίμετρο (τις εξωτερικές γραμμές) του χάρτη Karnaugh.
Έτσι, στο χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.3, τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m0 και m8 είναι γειτονικά. Επίσης, γειτονικά είναι τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m4 και m6, τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m2, m3, m10 και m11, καθώς και τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m4, m6, m12 και m14.

Δύο γειτονικά τετράγωνα σε ένα χάρτη Karnaugh αντιστοιχούν σε ελάχιστους όρους που διαφέρουν κατά *μία μόνο* μεταβλητή (η οποία εμφανίζεται με την πραγματική τιμή της στον έναν ελάχιστο όρο και με τη συμπληρωματική τιμή της στον άλλον ελάχιστο όρο). Αυτή η μεταβλητή μπορεί να απομακρυνθεί αν και στα δύο γειτονικά τετράγωνα έχει τεθεί “1”. Αν λοιπόν ομαδοποιήσουμε 2 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί “1” τότε απομακρύνουμε μία μεταβλητή.

Με την ίδια λογική, αν ομαδοποιήσουμε 4 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί “1”, τότε απομακρύνουμε 2 μεταβλητές, αν ομαδοποιήσουμε 8 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί “1”, τότε απομακρύνουμε 3 μεταβλητές.

Αν λοιπόν ομαδοποιήσουμε γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί “1” (επιτρέπεται να συμπεριληφθεί ένα τετράγωνο σε πολλές ομάδες γειτονικών τετραγώνων), τότε απομακρύνουμε μεταβλητές. Επομένως, επιτυγχάνεται η απλοποίηση της λογικής συνάρτησης που αναπαρίσταται με το χάρτη Karnaugh.

Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

- Γράφουμε τη συνάρτηση με μορφή αθροίσματος γινομένων και τοποθετούμε τους “1” της συνάρτησης στο χάρτη Karnaugh.
- Δημιουργούμε ομάδες με “1” (δηλαδή όρους της συνάρτησης) των 2, 4, 8 μελών από γειτονικά τετράγωνα (οριζόντια, κάθετα και αναδιπλούμενα, αλλά όχι διαγώνια). Προσπαθούμε να δημιουργούμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερες ομάδες. Κάθε “1” μπορεί να συμμετάσχει σε περισσότερες από μία ομάδες. Όταν όλοι οι “1”, που μπορούν να ομαδοποιηθούν, έχουν συμπεριληφθεί σε κάποια ομάδα, τότε δεν δημιουργούμε νέες ομάδες.
- Ξαναγράφουμε τη συνάρτηση με όρους που αντιστοιχούν στις ομάδες (παραλείποντας τις μεταβλητές που μέσα στην ομάδα αλλάζουν τιμή) και τους όρους που δεν έχουν ομαδοποιηθεί.

Παράδειγμα 1.

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση δύο μεταβλητών
$Y(A,B)=A\cdot\overline{B}+A\cdot B$

Η συνάρτηση είναι σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων. Τοποθετούμε τους “1” της συνάρτησης στον χάρτη Karnaugh, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.8.

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$		
A	1	1

Σχήμα 3.2.8
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης

$$Y = A \cdot \overline{B} + A \cdot B$$

Οι ελάχιστοι όροι $A \cdot \overline{B}$ και $A \cdot B$ δικαιολογούν την απομάκρυνση της μεταβλητής B.
Πράγματι, οι δύο “1” της συνάρτησης ομαδοποιούνται σε μία δυάδα: Τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο A. Η ομαδοποίηση των δύο τετραγώνων έχει ως αποτέλεσμα την απομάκρυνση μίας μεταβλητής (της μεταβλητής B) και την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:
Y=A

Παράδειγμα 2.

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών
$Y(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$

Τοποθετούμε τους “1” της συνάρτησης στο χάρτη Karnaugh, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.9.

	$\overline{B} \cdot \overline{C}$	$\overline{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \overline{C}$
$\overline{A}$			1	1
A	1	1		

Σχήμα 3.2.9
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
$Y(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$

Οι “1” της συνάρτησης ομαδοποιούνται σε δύο δυάδες:
- τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο $A \cdot \overline{B}$
- τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο $\overline{A} \cdot B$

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

Y=$A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$

Παράδειγμα 3.

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών
Y(A,B,C)= $\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.10.

	$\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{B}\cdot C$	$B\cdot C$	$B\cdot\overline{C}$
$\overline{A}$			1	
A	1		1	1

Σχήμα 3.2.10
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
Y(A,B,C)= $\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C$

Οι “1” της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:
- τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο $B\cdot C$
- τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο $A\cdot\overline{C}$

Επειδή <u>όλοι</u> οι “1”, που μπορούν να ομαδοποιηθούν, έχουν συμπεριληφθεί σε κάποια ομάδα, δεν δημιουργούμε νέες ομάδες (οι “1” της συνάρτησης στα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που αντιστοιχούν στους όρους $A\cdot B\cdot C$ και $A\cdot B\cdot\overline{C}$ δεν ομαδοποιούνται).

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$Y = A \cdot \overline{C} + B \cdot C$

Παράδειγμα 4.

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών
$Y(A,B,C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C}$

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων (να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις):

$$Y(A,B,C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C} =$$
$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.11.

	$\overline{B} \cdot \overline{C}$	$\overline{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \overline{C}$
$\overline{A}$	1			1
A	1	1		1

Σχήμα 3.2.11
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
$Y(A,B,C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C}$

Οι “1” της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:

- τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο $A \cdot \overline{B}$
- τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο $\overline{C}$

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$Y = A \cdot \overline{B} + \overline{C}$

Παράδειγμα 5.

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών
$Y(A,B,C) = \overline{A} \cdot C + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot C$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.12.

	$\overline{B} \cdot \overline{C}$	$\overline{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \overline{C}$
$\overline{A}$		1	1	1
A		1	1	

Σχήμα 3.2.12
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
$Y(A,B,C) = \overline{A} \cdot C + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot C$

Οι “1” της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:

- τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο $\overline{A} \cdot B$
- τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο C

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:
$Y = \overline{A} \cdot B + C$

Παράδειγμα 6.

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών
$Y(A,B,C,D) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} +$

$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+$$
$$+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+$$
$$+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 3.2.13.

	$\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{C}\cdot D$	$C\cdot D$	$C\cdot\overline{D}$
$\overline{A}\cdot\overline{B}$	1	1		1
$\overline{A}\cdot B$	1	1		1
$A\cdot B$	1	1		1
$A\cdot\overline{B}$	1	1		

Σχήμα 3.2.13
Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης Y(A,B,C,D)

Οι “1” της συνάρτησης ομαδοποιούνται ως εξής:

- τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο $\overline{A}\cdot\overline{D}$
- τα τέσσερα γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε πράσινο περίγραμμα (αναδίπλωση), αντιστοιχούν στον όρο $B\cdot\overline{D}$
- τα οκτώ γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο $\overline{C}$

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$Y=\overline{A}\cdot\overline{D}+B\cdot\overline{D}+\overline{C}$

Αδιάφοροι Όροι

Μία μεταβλητή εισόδου ή εξόδου ονομάζεται αδιάφορος όρος όταν δεν μας ενδιαφέρει η τιμή της (αν είναι “0” ή ”1”). Η τιμή ενός αδιάφορου όρου συμβολίζεται με X.

3.3 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Το πρόβλημα της Σχεδίασης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) είναι η σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ, όταν δίνεται η περιγραφή της λειτουργίας του.

Η μέθοδος σχεδίασης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ
2. Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
3. Απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
4. Σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ

Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΚ.

Να σχεδιαστεί ένα ΣΚ που αναγνωρίζει αν ένας 3-bits αριθμός είναι μικρότερος από 3, χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NOT και πύλες AND και OR δύο εισόδων.

Το ΣΚ έχει τρεις εισόδους A, B και C, που αποτελούν τη δυαδική αναπαράσταση ενός δεκαδικού αριθμού από το 0 έως και το 7 (θυμηθείτε ότι με 3 bits μπορούμε να μετρήσουμε $2^3=8$ αριθμούς) και μία έξοδο Y. Η έξοδος του ΣΚ είναι “1” όταν το δεκαδικό ισοδύναμο του 3-bits δυαδικού αριθμού των εισόδων του ΣΚ είναι μικρότερο από 3.

Βήμα 1. Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ

Από την περιγραφή της λειτουργίας του ΣΚ κατασκευάζεται ο Πίνακας Αληθείας του ΣΚ που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.3.1.

Πίνακας 3.3.1
Πίνακας Αληθείας του Συνδυαστικού Κυκλώματος

δεκαδικός	A	B	C	Y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Βήμα 2. Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ

Από τον Πίνακα Αληθείας του ΣΚ προκύπτει ότι η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ είναι Y=1 όταν
A=0 και (AND) B=0 και (AND) C=0
ή (OR)
A=0 και (AND) B=0 και (AND) C=1
ή (OR)
A=0 και (AND) B=1 και (AND) C=0

Επομένως, η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ ευρίσκεται ως συνάρτηση των εισόδων του ΣΚ:
$Y=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$

Βήμα 3. Απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ

Η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας:
- τρεις πύλες NOT
  για την εύρεση $\overline{A}$, $\overline{B}$ και $\overline{C}$
- πέντε πύλες AND δύο εισόδων

για τον υπολογισμό $\overline{A}\cdot\overline{B}$, $(\overline{A}\cdot\overline{B})\cdot C$, $(\overline{A}\cdot\overline{B})\cdot\overline{C}$, $\overline{A}\,B$ και $(\overline{A}\cdot B)\cdot\overline{C}$

- δύο πύλες OR δύο εισόδων
  για τον υπολογισμό $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$ και $(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C)+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$

Η απλοποίηση της συνάρτησης εξόδου του ΣΚ οδηγεί σε απλούστερο (και οικονομικότερο) κύκλωμα.

Η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ μπορεί να απλοποιηθεί (χρησιμοποιώντας Άλγεβρα Boole ή χάρτη Karnaugh):
$Y=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}=\overline{A+B\cdot C}$

Βήμα 4. Σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ

Για τη σχεδίαση του λογικού κυκλώματος του ΣΚ, *ξεκινώντας από την έξοδο* προς τις εισόδους του κυκλώματος, σχεδιάζονται οι πύλες του κυκλώματος λαμβάνοντας υπόψη τις λογικές πράξεις των συναρτήσεων εξόδων του ΣΚ. Το λογικό κύκλωμα χωρίζεται σε επίπεδα που περιέχουν τις πύλες, με βάση την προτεραιότητα των πράξεων (παράγραφος 1.2.5 του Κεφαλαίου 1).

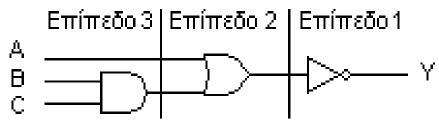
Ξεκινώντας από την έξοδο του ΣΚ προς τις εισόδους του ΣΚ, το κύκλωμα χωρίζεται σε τρία επίπεδα πυλών:

Επίπεδο 1.
Μία πύλη NOT που χρησιμοποιείται για την εύρεση της εξόδου $\overline{A+B\cdot C}$ του ΣΚ, αποτελεί το τελευταίο επίπεδο πυλών.

Επίπεδο 2.
Μία πύλη OR δύο εισόδων που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό $A+B\cdot C$, αποτελεί το δεύτερο επίπεδο πυλών.

Επίπεδο 3.
Μία πύλη AND δύο εισόδων, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό B·C, αποτελεί το πρώτο επίπεδο πυλών.

Τα τρία επίπεδα πυλών φαίνονται στο Σχήμα 3.3.1, όπου παρουσιάζεται το λογικό κύκλωμα του ΣΚ που αναγνωρίζει αν ένας 3-bits αριθμός είναι μικρότερος από 3.



Σχήμα 3.3.1
Συνδυαστικό Κύκλωμα

3.3.1 ΣΥΓΚΡΙΤΗΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο συγκριτής μεγέθους δύο 2-bits δυαδικών αριθμών είναι ένα συνδυαστικό κύκλωμα που έχει εισόδους τους δύο 2-bits δυαδικούς αριθμούς A=A2A1 και B=B2B1 και τρεις εξόδους που είναι “1”, όταν οι αριθμοί είναι A<B, A=B και A>B, αντίστοιχα.
Ο Πίνακας Αληθείας του συγκριτή παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.3.2.

Πίνακας 3.3.2
Πίνακας Αληθείας του συγκριτή μεγέθους

A		B		A<B	A=B	A>B
A2	A1	B2	B1	Y1	Y2	Y3
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0

1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

Οι συναρτήσεις εξόδου του συγκριτή είναι:

$$Y1 = \overline{A2} \cdot \overline{A1} \cdot B1 + \overline{A1} \cdot B2 \cdot B1 + \overline{A2} \cdot B2$$

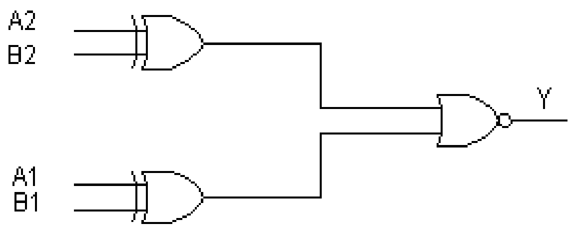
$$Y2 = \overline{A2} \cdot \overline{A1} \cdot \overline{B2} \cdot \overline{B1} + \overline{A2} \cdot A1 \cdot \overline{B2} \cdot B1 + A2 \cdot \overline{A1} \cdot B2 \cdot \overline{B1} + A2 \cdot A1 \cdot B2 \cdot B1$$

$$Y3 = A2 \cdot \overline{B2} + A2 \cdot A1 \cdot \overline{B1} + A1 \cdot \overline{B2} \cdot \overline{B1}$$

Ο συγκριτής ισότητας δύο 2-bits δυαδικών αριθμών είναι το συνδυαστικό κύκλωμα που αναγνωρίζει αν οι δύο 2-bits δυαδικοί αριθμοί είναι ίσοι (A=B) και έχει έξοδο τη συνάρτηση Y2, η οποία μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$Y2 = \overline{(A2 \oplus B2) + (A1 \oplus B1)}$$

Ο συγκριτής ισότητας μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες XOR δύο εισόδων και μία πύλη NOR δύο εισόδων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3.1.



Σχήμα 3.3.1
Συγκριτής ισότητας

3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

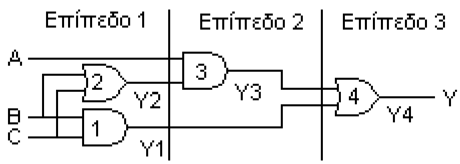
Το πρόβλημα της Ανάλυσης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) είναι η περιγραφή της λειτουργίας του ΣΚ, όταν δίνεται το λογικό κύκλωμα.

Η μέθοδος ανάλυσης ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

1. Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ
2. Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ
3. Περιγραφή της επιθυμητής λειτουργίας του ΣΚ

Παράδειγμα Ανάλυσης ΣΚ.

Να προσδιοριστεί η λειτουργία του ΣΚ το λογικό κύκλωμα του οποίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4.1.



Σχήμα 3.4.1
Συνδυαστικό Κύκλωμα

Βήμα 1. Εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ

Το ΣΚ του Σχήματος 3.4.1 έχει τρεις εισόδους A, B και C και μία έξοδο Y. Το κύκλωμα αποτελείται από δύο πύλες AND δύο εισόδων (πύλες 1 και 3) και δύο πύλες OR (πύλες 2 και 4) δύο εισόδων.
Για την εύρεση των συναρτήσεων εξόδου του ΣΚ, *ξεκινώντας από τις εισόδους* προς τις εξόδους του κυκλώματος, το κύκλωμα χωρίζεται σε επίπεδα πυλών και καταγράφονται οι συναρτήσεις εξόδων των πυλών. Οι συναρτήσεις εξόδων των πυλών του πρώτου επιπέδου είναι συναρτήσεις των εισόδων του ΣΚ. Οι συναρτήσεις εξόδων των πυλών των επόμενων επιπέδων είναι συναρτήσεις των εξόδων των πυλών

των προηγούμενων επιπέδων. Οι συναρτήσεις εξόδων των πυλών του τελευταίου επιπέδου, που είναι οι συναρτήσεις εξόδων του ΣΚ, θα είναι προφανώς συναρτήσεις των εισόδων του ΣΚ.

Ξεκινώντας από τις εισόδους του ΣΚ προς την έξοδο του ΣΚ, το κύκλωμα χωρίζεται σε τρία επίπεδα πυλών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4.1:

Επίπεδο 1.
Οι πύλες 1 και 2 αποτελούν το πρώτο επίπεδο πυλών.
Η έξοδος της πύλης 1 είναι:
$Y1=B\cdot C$
και η έξοδος της πύλης 2 είναι:
$Y2=B+C$

Επίπεδο 2.
Η πύλη 3 αποτελεί το δεύτερο επίπεδο και η έξοδός της είναι:
$Y3=A\cdot Y2=A\cdot(B+C)$

Επίπεδο 3.
Η πύλη 4 αποτελεί το τρίτο (τελευταίο) επίπεδο και η έξοδός της είναι:
$Y4=Y1+Y3=B\cdot C+A\cdot(B+C)$

Η συνάρτηση εξόδου της πύλης 4 του τελευταίου επιπέδου είναι η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ:
$Y=Y4$

Επομένως, η συνάρτηση εξόδου του ΣΚ ευρίσκεται ως συνάρτηση των εισόδων του ΣΚ:
$Y=Y4=A\cdot(B+C)+B\cdot C$

Βήμα 2. Κατασκευή του Πίνακα Αληθείας του ΣΚ

Από τη συνάρτηση εξόδου του ΣΚ κατασκευάζεται ο Πίνακας Αληθείας του ΣΚ, που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.4.1.

Πίνακας 3.4.1
Πίνακας Αληθείας του Συνδυαστικού Κυκλώματος

A	B	C	Y1=B·C	Y2=B+C	Y3=A·(B+C)	Y=Y4=A·(B+C)+B·C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Βήμα 3. Περιγραφή της επιθυμητής λειτουργίας του ΣΚ

Από τον Πίνακα αληθείας του ΣΚ, παρατηρούμε ότι:
- η έξοδος του ΣΚ είναι "1", όταν οι δύο από τις τρεις εισόδους του είναι "1" ή όταν όλες οι είσοδοί του είναι "1"
- η έξοδος του ΣΚ είναι "0", όταν οι δύο από τις τρεις εισόδους του είναι "0" ή όταν όλες οι είσοδοί του είναι "0"

Επομένως, η έξοδος του ΣΚ είναι "1", όταν οι περισσότερες από τις εισόδους του ΣΚ είναι "1" και η έξοδος του ΣΚ είναι "0", όταν οι περισσότερες από τις εισόδους του ΣΚ είναι "0", δηλαδή το ΣΚ υλοποιεί τη *συνάρτηση πλειοψηφίας*.